ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ CÚC

PHƯƠNG PHÁP HUNGARI GIẢI BÀI TOÁN GIAO VIỆC TUYẾN TÍNH VÀ MỞ RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán giao việc (Assignment Problem) là một trường hợp riêng quan trọng của bài toán qui hoạch tuyến tính và có quan hệ gần gũi với bài toán vận tải (Transportation Problem) và bài toán người du lịch (Traveling Salesman Problem) trong tối ưu tổ hợp và lý thuyết đồ thị. Bài toán giao việc có nhiều ứng dụng thiết thực, đa dạng trong thực tiễn và luôn là chủ đề hấp dẫn của tối ưu hóa. Hiện vẫn có nhiều nghiên cứu đề cập tới bài toán giao việc nhằm tổng quát và mở rộng phạm vi ứng dụng của bài toán.

Phương pháp Hungari (Hungarian Method) rất độc đáo và hiệu qủa để giải bài toán giao việc. Tên gọi của phương pháp là để tưởng nhớ hai nhà toán học Hungari: König và Egeváry, đã có công đầu tạo ra cơ sở lý luận cho phương pháp. Harold W. Kuhn là người đã phát triển và công bố phương pháp này năm 1955 (xem [6]).

Phương pháp Hungari đã trở nên quen thuộc, được dùng rộng rãi và có thể mở rộng cho nhiều bài toán khác của qui hoạch tuyến tính, trong đó có bài toán vận tải mà thuật toán "thu hẹp chính tắc" là một dạng mở rộng như thế.

Luận văn "*Phương pháp Hungari giải bài toán giao việc tuyến tính và mở rộng*" nhằm mục đích tìm hiểu bài toán giao việc với hàm mục tiêu tuyến tính và các ứng dụng của bài toán; Phương pháp Hungari giải bài toán giao việc tuyến tính và phương pháp "thu hẹp chính tắc" giải bài toán vận tải (ở dạng ma trận) của qui hoạch tuyến tính.

Luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1 "Phương pháp Hungari và bài toán giao việc" trình bày nội dung bài toán giao việc với hàm mục tiêu tuyến tính và một số ứng dụng của bài toán, đồng thời đề cập tới một số bài toán có liên quan: Bài toán vận tải và bài toán người du lich. Tiếp đó, luận văn trình bày phương pháp Hungari quen thuộc giải bài toán và các ví dụ minh họa.

Chương 2 "Phương pháp thu hẹp chính tắc" đề cập tới bài toán vận tải với hàm mục tiêu tuyến tính, một dạng mở rộng của bài toán giao việc tuyến tính (khi vế phải nguyên, khác 1) và trình bày phương pháp "thu hẹp chính tắc" do Giả sử Hoàng Tụy đưa ra trong [3] (có chung ý tưởng với phương pháp Hungari) để giải bài toán.Luận văn đã nêu các ví dụ minh họa cho thuật toán giải đã trình bày. Phân tích quan hệ giữa phương pháp thu hẹp chính tắc với phương pháp Hungari và một số phương pháp giải khác có cùng ý tưởng.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy, cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này, tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS - TS Trần Vũ Thiệu, người đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán hoc - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Tác giả

Vũ Thị Cúc

Chương 1
PHƯƠNG PHÁP HUNGARI VÀ BÀI TOÁN GIAO VIỆC

Chương này đề cập tới bài toán giao việc, một dạng đặc biệt của bài toán vận tải và có nhiều ứng dụng rộng rãi. Sau khi nêu nội dung và ý nghĩa của bài toán, luận văn sẽ trình bày phương pháp Hungari quen thuộc giải bài toán và các ví dụ minh họa. Nội dung của chương được tham khảo từ tài liệu [1], [4] và [7].

1.1. BÀI TOÁN GIAO VIỆC TUYẾN TÍNH

Bài toán này có nội dung như sau: Có n người (i = 1, 2, ... , n) và n công việc (j = 1, 2, ... , n). Để giao cho người i thực hiện công việc j cần một chi phí $c_{ij} \geq 0$. Vấn đề là cần giao cho người nào làm việc gì (mỗi người chỉ làm một việc, mỗi việc chỉ do một người làm) sao cho chi phí tổng cộng nhỏ nhất?

Mô hình toán học cho bài toán này như sau:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1.1)$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, \dots, n \text{ (mỗi người chỉ làm một việc)}, \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, \dots, n \text{ (mỗi việc chỉ do một người làm)}, \qquad (1.3)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ hay } 1,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n \text{ (biến nhị nguyên)}. \qquad (1.4)$$

Vì có các điều kiện (1.2), (1.3) nên điều kiện (1.4) có thể thay bằng

$$x_{ij} \text{ nguyên} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán (1.1) - (1.4) gọi là *bài toán giao việc* với ma trận chi phí $C = [c_{ij}]$.

Định nghĩa 1.1. Các số $\{x_{ij}\}$ thỏa mãn (1.2) - (1.4) gọi là một *phương án giao việc*, hay ngắn gọn là một *phương án*, một phương án đạt cực tiểu của (1.1) gọi là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán.

Giả sử danh sách *người* và *việc* được viết theo một thứ tự nhất định. Khi đó có một cách giao việc đơn giản là giao cho người i thực hiện công việc ở vị trí thứ i trong danh sách. Nếu danh sách các công việc được sắp xếp lại và ta vẫn giao cho người i làm việc j trong danh sách thì rất có thể ta sẽ có chi phí tổng cộng nhỏ hơn. Vấn đề là cần xáo trộn danh sách các công việc sao cho chi phí tổng cộng là nhỏ nhất. Nói một cách khác, cần tìm một hoán vị $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ của *n* số 1, 2, ... , n sao cho tổng số

$$c_{1i_1} + c_{1i_2} + \ldots + c_{1i_n}$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Số hoán vị của n số 1, 2, ... , n bằng n!, vì thế bài toán có n! phương án.

Hàm n! tăng theo hàm giai thừa: 4! = 24, 10! = 3.628.800 và 100! = $9{,}3\times10^{157}$. Tính và so sánh n! phương án để chọn ra phương án tối ưu là một thuật toán không có hiệu quả thực tế, vì đó là một thuật toán thời gian mũ.

Mỗi hoán vị của n số 1, 2, ... , n có thể đặt tương ứng với một ma trận vuông cấp n : $X = [x_{ij}]$, với các phần tử 0 hoặc 1, $x_{ij} = 1$ có nghĩa là người i được giao làm việc j. Chẳng hạn, hoán vị 3, 1, 2 tương ứng với ma trận

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Để ý rằng trên mỗi hàng, mỗi cột của ma trận X có vừa đúng một số 1 (mọi số còn lại bằng 0).

Cùng với bài toán min z, ta có thể xét bài toán max z với cùng các điều kiện (1.2) - (1.4). Khi đó c_{ij} biểu thị hiệu quả thu được khi giao cho người i thực hiện công việc j.

Bài toán giao việc rất gần với hai bài toán quen thuộc sau đây.

• Bài toán vận tải: Cần vận chuyển một loại hàng (xi măng chẳng hạn) từ m nơi cung cấp hàng (gọi là *trạm phát*) tới n nơi tiêu thụ hàng (gọi là *trạm thu*). Cho biết lượng hàng có ở trạm phát i (i = 1, 2, ... , m) là số p_i nguyên > 0, và lượng hàng cần ở tram thu j (j = 1, 2, ... , n) là số q_j nguyên > 0 và giá cước vận chuyển một đơn vị hàng từ trạm phát i tới trạm thu j là $c_{ij} \geq 0$. Giả thiết các p_i, q_j thỏa mãn điều kiện cân bằng cung cầu: $p_1 + p_2 + ... + p_m = q_1 + q_2 + ... + q_n$. Vấn đề đặt ra là: cần tìm một phương án vận chuyển hàng từ mỗi trạm phát tới mỗi trạm thu sao cho mọi trạm phát đều giao hết lượng hàng có, mọi trạm thu đều nhận đủ lượng hàng cần, và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất? Mô hình toán học của bài toán này sẽ được nêu ở Mục 2.1, Chương 2.

• Bài toán người du lịch: Có n thành phố, đánh số từ 1 tới n. Xuất phát từ một trong n thành phố này (chẳng hạn thành phố 1), một khách du lịch muốn tới thăm (n - 1) thành phố còn lại, mỗi thành phố vừa đúng một lần, rồi trở về thành phố xuất phát. Cho biết c_{ij} là chi phí đi từ thành phố i tới thành phố j. Giả thiết $c_{ij} > 0$ với mọi $i \neq j$ và $c_{ii} = +\infty$ với mọi i (có thể $c_{ij} \neq c_{ji}$). Hãy tìm cho khách du lịch một hành trình có tổng chi phí nhỏ nhất? Có một số cách diễn đạt toán học cho bài toán này, trong đó có mô hình tương tự (1.1) - (1.4) (xem chẳng hạn, [1] tr. 250).

Trong mô hình (1.1) - (1.4) ở trên, ta giả thiết số người bằng số việc. Tuy nhiên, có thể xét trường hợp khi số người khác số việc. Ví dụ, nếu số người nhiều hơn số việc, ta thêm vào các *việc giả* với chi phí hay hiệu quả bằng 0.

Một số vấn đề không liên quan gì tới người và việc cũng có thể giải quyết nhờ mô hình bài toán giao việc. Chẳng hạn, cần lắp đặt các máy vào những vị trí khác nhau sao cho tốn ít chi phí, hay cần phân công các nhà máy sản xuất các sản phẩm sao cho đạt hiệu quả cao nhất. Ta hãy xét vài ví dụ.

Ví dụ 1.1. Một cơ sở dịch vụ vừa mua 3 loại máy mới. Có 4 vị trí thích hợp cho việc lắp đặt các loại máy này, mỗi vị trí đặt được một máy. Do đặc điểm vị trí và do tính năng của mỗi máy, nên chi phí lắp đặt và khai thác mỗi máy ở các vị trí khác nhau có thể khác nhau. Chi phí này được cho ở Bảng

1.1. Vị trí 2 không phù hợp để đặt máy 2 nên ở ô tương ứng không ghi chi phí. Cần đặt máy vào những vị trí nào sao cho chi phí tổng cộng là nhỏ nhất?

Để diễn đạt bài toán này dưới dạng bài toán giao việc, ta thêm vào một máy giả (máy 4) cho vị trí thừa ra. Đồng thời, gán cho ô ứng với máy 2 và vị trí 2 một chi phí bằng số M khá lớn, để ngăn không cho đặt máy 2 ở vị trí 2. Kết quả ta nhận được Bảng 1.2.

Bảng 1.1. Dữ liệu Ví dụ 1.1

Máy	Vị trí			
	1	2	3	4
1	17	20	16	15
2	16	-	14	21
3	10	12	15	11

Bảng 1.2. Phương án tối ưu

Máy	Vị trí			
	1	2	3	4
1	17	20	16	**15**
2	16	M	**14**	21
3	**10**	12	15	11
4	0	**0**	0	0

Áp dụng thuật toán giải nêu ở mục sau, ta nhận được lời giải: máy 1 đặt ở vị trí 4, máy 2 đặt ở vị trí 3, máy 3 đặt ở vị trí 1, với tổng chi phí bằng 39. Máy giả được đặt ở vị trí 2, vì thế vị trí này có thể dùng để đặt máy thực trong tương lai.

Ví dụ 1.2. Một hãng sản xuất định chế tạo 4 loại sản phẩm mới bằng cách tận dụng năng lực dư thừa của 4 nhà máy thuộc hãng. Hiệu quả sản xuất của các nhà máy được cho trong Bảng 1.3. Hãy tìm cách phân công cho nhà máy nào sản xuất sản phẩm gì (mỗi nhà máy chỉ sản xuất một loại sản phẩm, mỗi loại sản phẩm chỉ do một nhà máy sản xuất) để thu được hiệu quả tổng cộng lớn nhất?

Lời giải: Nhà máy 1 sản xuất sản phẩm I, nhà máy 2 sản xuất sản phẩm III, nhà máy 3 sản xuất sản phẩm IV, nhà máy 4 sản xuất sản phẩm II. Hiệu quả tổng cộng bằng 30 (xem Bảng 1.3).

Bảng 1.3. Dữ liệu Ví dụ 1.2

Nhà máy	Sản phẩm I	II	III	IV
1	9	6	3	7
2	7	9	**10**	6
3	6	3	2	**5**
4	5	**6**	5	3

Bảng 1.4. Dữ liệu Ví dụ 1.3

Tầu	Cảng 1	2	3	4
A	**3**	5	7	5
B	4	7	8	**3**
C	3	**4**	6	2
D	5	7	**9**	6

Ví dụ 1.3. Ở một cảng nọ có 4 tầu A, B, C, D có thể dùng để chở hàng tới 4 cảng 1, 2, 3, 4. Do sự khác nhau về loại tầu và loại hàng nên tổng chi phí xếp, dỡ và vận chuyển hàng trên các tầu khác nhau tới các cảng khác nhau có sự khác biệt đáng kể. Các chi phí này được cho ở Bảng 1.4. Vấn đề là điều tầu nào tới cảng nào (mỗi tầu tới một cảng, mỗi cảng có một tầu tới) sao cho chi phí tổng cộng của cả 4 chuyến hàng là nhỏ nhất?

Một trong số các lời giải là: A → 1, B → 4, C → 2, D → 3, với tổng chi phí bằng 19 (xem Bảng 1.4).

1.2. PHƯƠNG PHÁP HUNGARI

Bài toán (1.1) - (1.4) là trường hợp riêng của mô hình bài toán vận tải, trong đó số địa điểm sản xuất bằng số địa điểm tiêu thụ, đồng thời các khả năng cung cấp p_i bằng các yêu cầu tiêu thụ q_j và đều bằng 1. Vì thế về nguyên tắc có thể dùng phương pháp giải bài toán vận tải (chẳng hạn, thuật toán thế vị) để giải bài toán giao việc. Tuy nhiên, do cấu trúc đặc biệt của bài toán giao việc nên có những thuật toán giải riêng, hiệu quả hơn. Dưới đây sẽ trình bày một trong các phương pháp đó, với tên gọi *phương pháp Hungari*.

Giả sử ta xét bài toán min z. Trước hết ta nêu một số định lý làm cơ sở lý luận cho phương pháp Hungari.

Định lý 1.1. *Giả sử ma trận chi phí của bài toán* (1.1) - (1.4) *không âm và có ít nhất n phần tử bằng 0. Hơn nữa nếu n phần tử 0 này nằm ở n hàng khác nhau và n cột khác nhau thì phương án giao cho người i thực hiện công* *việc tương ứng với số 0 này ở hàng i sẽ là phương án tối ưu* (*lời giải*) *của bài toán* (1.1) - (1.4).

Chứng minh. Theo giả thiết của định lý, mọi phương án giao việc có chi phí không âm. Trong khi đó, phương án giao việc nêu trong định lý có chi phí bằng 0, nên chắc chắn phương án đó là tối ưu. ■

Định lý sau đây cho thấy rằng ta có thể biến đổi ma trận chi phí của bài toán mà không làm ảnh hưởng tới lời giải của nó. Vì thế phương pháp giải nêu dưới đây sẽ thực hiện ý tưởng biến đổi ma trận chi phí cho đến khi đạt tới ma trận có ít nhất một phần tử 0 trên mỗi hàng và mỗi cột.

Định lý 1.2. *Cho* $C = [c_{ij}]$ *là ma trận chi phí của bài toán giao việc* (*n người, n việc*) *và* $X^* = [x^*_{ij}]$ *là một lời giải* (*phương án tối ưu*) *của bài toán này. Giả sử* C' *là ma trận nhận được từ* C *bằng cách thêm số* $\alpha \neq 0$ (*dương hay âm*) *vào mỗi phần tử ở hàng r của* C. *Khi đó* X* *cũng là lời giải của bài toán giao việc với ma trận chi phí* C'.

Chứng minh. Hàm mục tiêu của bài toán giao việc mới bằng

$$z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}+\alpha)x_{rj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \alpha\times\sum_{j=1}^{n} x_{rj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \alpha.$$

Đẳng thức cuối cùng có được là do tổng các x_{ij} trên mỗi hàng, mỗi cột đều bằng 1. Vì thế, giá trị nhỏ nhất của z' đạt được khi và chỉ khi

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

là nhỏ nhất. Cụ thể là, z' đạt cực tiểu tại X = X*. ■

Định lý 1.2 vẫn còn đúng nếu ta thêm một hằng số vào mỗi phần tử trên cùng một cột của ma trận chi phí. Vậy, chiến thuật của ta là biến đổi C bằng cách thêm hằng số vào các hàng và các cột của ma trận chi phí.